1148. 二ツノ定理ニ就イテ

春木　　博（神戸高商船）

§1.（定理1）複素数平面上ニ於テ、任意ノ多項式 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n$ ノ凡ベテノ零点 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ ヲ内部ニ含ム任意ノ円 $|z|=r\left(>\underset{1\leqq k\leqq n}{\mathrm{Max}}|\alpha_k|\right)$ ノ $f(z)$ ニヨル w 平面ヘノ写像曲線ハ凸曲線デアル。

（証明）　$f'(z)$ ノ零点ヲ $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_{n-1}$ トスレバ，方程式論ニ於ケルガウスノ定理ニヨリ、$\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_{n-1}$ ハ n 箇ノ点 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\cdots,\alpha_n$ ヲ包ム最小凸多角形ニ包マレ、従ッテ $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_{n-1}$ ハ勿論 $|z|=r\left(>\underset{1\leqq k\leqq n}{\mathrm{Max}}|\alpha_k|\right)$ ノ内部ニアル。

又 $\dfrac{f''(z)}{f'(z)}=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{z-\beta_k}$ ナルヨリ知ラレタ関係式ノ両辺ニzヲカケ、ソノ實數部ヲ考ヘレバ

$$R\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}=R\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z}{z-\beta_k}\right\}=\sum_{k=1}^{n-1}R\left(\frac{z}{z-\beta_k}\right)\cdots\cdots(1)$$

$z=x+iy$, $\beta_k=s_k+it_k$ トオケバ

$$R\left(\frac{z}{z-\beta_k}\right)=\frac{x^2+y^2-s_kx-t_ky}{(x-s_k)^2+(y-t_k)^2}$$

ガウス平面上ニ於テ、$x^2+y^2-s_kx-t_ky=0$ ハ点 $\left(\frac{1}{2}s_k, \frac{1}{2}t_k\right)$ 即チ点 $\frac{1}{2}\beta_k$ ヲ中心トシ半径 $\frac{1}{2}|\beta_k|$ ナル円,

換言スレバ原点ト点 β_k トヲ直径ノ両端トスル円ヲアラハス。(以下、コノ円ヲ円 β_k ト呼ブコトニスル)

従ッテ円 β_k 外ノ点 (x, y) ニ對シテハ

$$x^2+y^2-s_kx-t_ky>0$$

従ッテ, 前述ノ通リ $|z|=r\left(>\max_{1\leqq k\leqq n}|\alpha_k|\right)$ ハ円 β_1, 円 β_2, 円 β_3, ……, 円 β_k, ……, 円 β_{n-1} ヲ内部ニ含ムカラ

$|z|=r$ 上ノ任意ノ点 $z=x+iy$ ニ對シテハ(1)ニヨリ

$$R\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}>0>-1$$

故ニ $f(z)$ ニヨル $|z|=r$ ノ寫像曲線ハ凸曲線デアル.

§2. $0<b<a$ トシ

$a_1=\frac{1}{2}(a+b)$, $a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$, ……, $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$, …,

$b_1=\sqrt{ab}$, $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, ……, $b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$, ……,

トスレバ，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ハ同一ノ極限値M（Mハ a, b ノ算術幾何平均ト名付ケラレル）ヲ持チ，Mハ

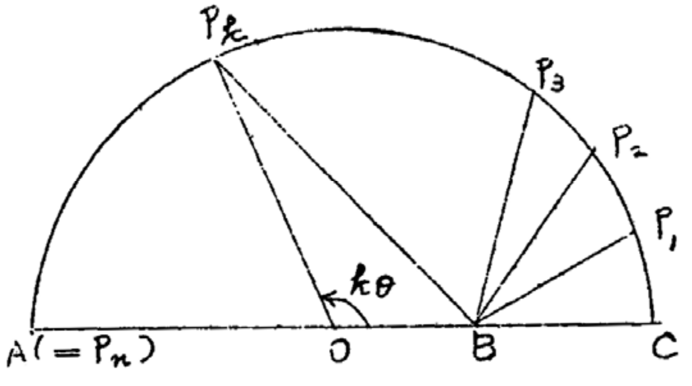
$$\frac{1}{M}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\frac{2}{a\pi}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

デ與ヘラレルコトヲガウスハ論ジタ。茲ニ

$k=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ デアル。以下 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=K$ トショウ。

次ニ，コノ極限値Mノ別ノ意義ヲ與ヘテ見ヨウ。

（定理2）　一直線上ニ，三点A, B, Cヲ取リ AB$=a$, BC$=b$ トシメル。



次ニ ACヲ直径トスル半円Oヲエがキ，ソノ半円周ヲn等分シ，ソノ分点ヲ P_1, P_2, P_3, ……, P_k, ……, P_n（＝A）トシ、n箇ノ線分 BP_1, BP_2, BP_3, ……, BP_k, ……, BP_n ノ長サノ調和平均ヲ H_n トスレバ

$\lim_{n\to\infty} H_n=M$ デアル。

（証明）　中心角 $COP_1 = \theta$ トオケバ　$n\theta = \pi$

定義ニヨリ

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{BP_k}}}{n}$$

$\triangle BOP_k$ ニ餘弦公式ヲ適用スレバ

$$\overline{BP_k} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos k\theta}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\theta}}$$

之ヨリ計算ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n} = \frac{2}{a\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{2K}{a\pi}\left(k = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)$$

シカルニ，$a\pi = 2KM$ ナル故

$$\lim_{n\to\infty} H_n = M$$

———（完）———